本学期电磁学期末考试安排

时间：2017年6月29日上午
8:30 - 10:30

地点：教五楼5203、5204教室

自带计算器、校园一卡通

第九章 交流电

§9.1 基本概念和描述方法

§9.2 交流电路的复数解法

§9.3 交流电路的功率

§9.4 交流电路的分析举例

回顾

我们已经学了两种电路：稳恒电路(第四章)和似稳电路(§7.4)，复习一下其主要内容.

稳恒电路

1. 电流

电流强度：$I = \dfrac{dq}{dt}$

电流密度：$|\boldsymbol{j}| = \dfrac{dI}{dS_{\perp}}$； $I = \iint \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}$

电流连续性方程 $\oiint \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} = -\dfrac{dq}{dt}$

稳恒电流条件 $\oiint \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$

2.电阻

$$R = \rho\frac{\ell}{S}, \quad \rho = \frac{1}{\sigma}$$

3.欧姆定律

外电路中: $U = IR, \quad I = \dfrac{U}{R}, \quad \boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}.$

全电路中: $\varepsilon = \displaystyle\int_{-内}^{+}\boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_{L}\boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{\ell},$

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}), \quad I = \frac{\varepsilon}{R+r}.$$

4.电功率

$$P = UI \quad P = I^2 R \quad P = \frac{U^2}{R}$$

热功率密度：$p = \frac{j^2}{\sigma}$

5.基尔霍夫定律

节点电流方程 $\sum I = \sum (I_{入} - I_{出}) = 0.$

回路电压方程 $\sum U = \sum (\pm \varepsilon \pm Ir \pm IR) = 0.$

似稳电路

似稳电路的判据:

$$1/f >> l/c \xrightarrow{\lambda=c/f} \lambda >> l$$

暂态过程中，电流随时间的变化是在接通或断开直流电源的短暂时间里进行的，是从初态趋于最终的稳态的变化过程。这一变化过程的快慢由电路参量R、L和C决定。属于一种特殊的非稳态过程。

我们只研究了似稳电路的暂态过程。

- 似稳电路的基本方程：

$$\varepsilon = iR + \frac{1}{C}\int i\,dt + L\frac{di}{dt} + M\frac{di'}{dt}$$

§9.1 基本概念和描述方法

一、交流电路

交流电路不同于稳恒电路和暂态过程。

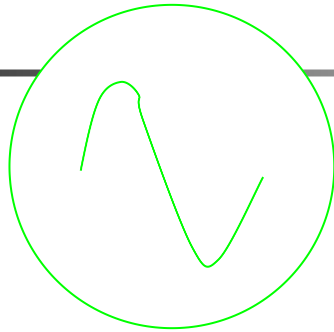
■电路中电源的**电动势**随时间作周期变化，电路各段上的**电流**和**电压**也随时间作周期变化，这种电路称为**交流电路**.

■相应的电动势、电流和电压**分别称为**交流电动势、交流电流和交流电压，习惯上称为**交流电**。

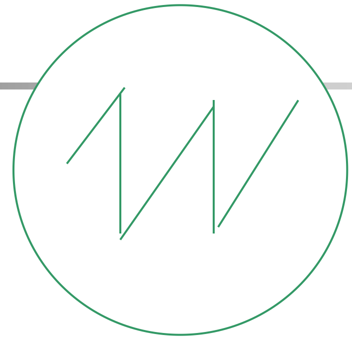
■本章主要介绍**似稳交流电路**的基本理论和计算方法，并着重介绍似稳交流电路的**复数解法**。

■我国采用的频率为**50Hz**的交流电，似稳条件为 $l << 6\times10^{6}$ m，所以**一个大城市内电路**上电流的分布可以看成**是似稳的**。

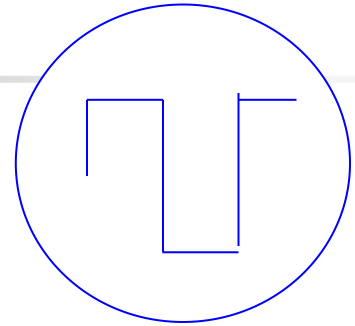
二、交流电类型



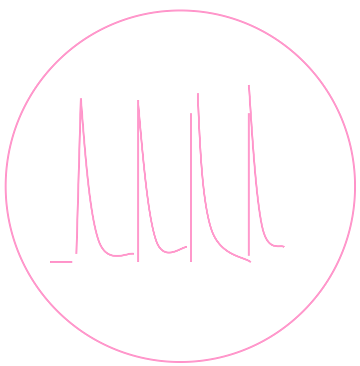
a. 简谐波



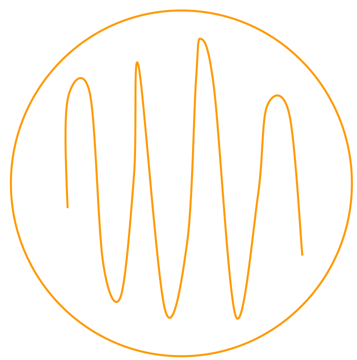
b. 锯齿波



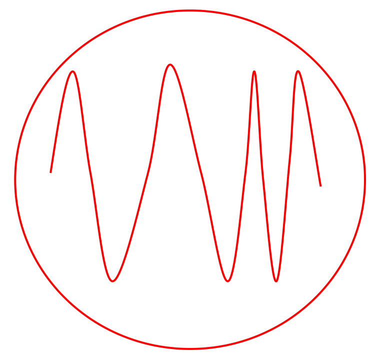
c. 矩形波



d. 尖脉冲



e. 调幅波



f. 调频波

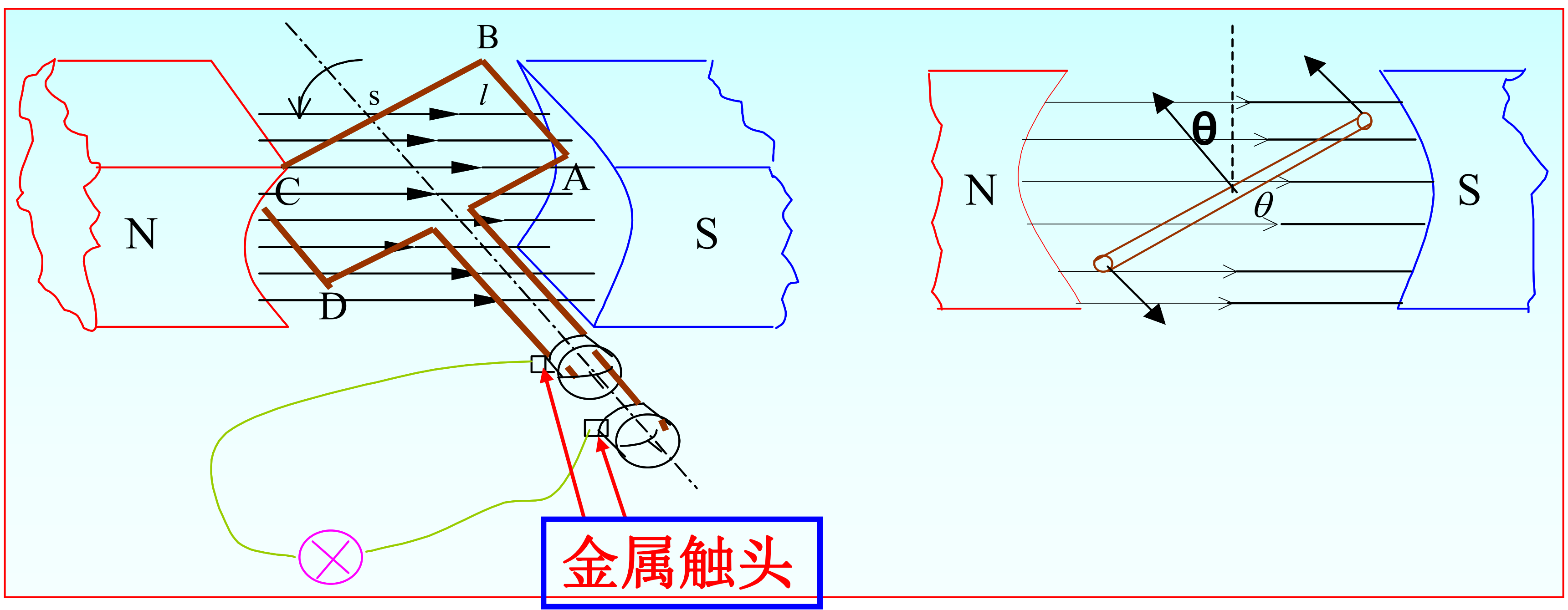
- 不同类型的交流电由不同的电源或信号源产生，满足不同的需求。

- **简谐交流电**：随时间以**正弦**或**余弦规律变化**的、有一定**频率**和**峰值**的简谐波，我国工业和民用交流电的频率为50Hz。美国为60Hz。

- 各类交流电波形具有**共同特征**：
  - 具有固定的**频率**（或作周期性的变化）。
  - 任何**非简谐式**的交流电都**可以分解**为一系列不同频率的简谐成分。所以**最基本、最重要的**是**简谐交流电**。
  - **不同频率的简谐波**在线性电路中可以各自独立、互不干扰地传播，因此**可以单独地加以处理**。

2.1 简谐交流电的产生——交流发电机

- 交流发电机产生的感应电动势和感应电流是随时间作周期性变化的，为交流电；并且符合余弦函数的振动规律，属于简谐振动，因而为简谐交流电。交流发电机是根据电磁感应原理制成的，它是动生电动势的典型例子。



交流发电机原理

图中ABCD是一个单线圈，可以绕固定的转轴在N、S磁极所激发的均匀磁场中转动。为避免线圈的两根引线在转动过程中扭绞起来，线圈两端分别接在两个与线圈一起转动的铜环上，铜环通过两个带有弹性的金属触头与外电路接通。

2.2 简谐交流电动势的计算

当线圈在原动机（如水轮机）带动下在均匀磁场中匀速转动时，**AB**和**CD**边切割磁力线，在线圈中产生动生电动势：

$$\varepsilon_{AB}=\int_A^B(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})\bullet d\boldsymbol{l}=\int_A^B VB\sin(\pi/2+\theta)dl=VBl\cos\theta$$

$$\varepsilon_{CD}=\int_C^D(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})\bullet d\boldsymbol{l}=\int_C^D VB\sin(\pi/2-\theta)dl=VBl\cos\theta$$

所以 $\varepsilon_{totle}=\varepsilon_{AB}+\varepsilon_{CD}=2VBl\cos\theta$

因为 $\theta=\omega t, V=\dfrac{d}{2}\omega$

所以 $\boxed{\varepsilon=2\dfrac{d}{2}\omega Bl\cos\omega t=BS\omega\cos\omega t.}$

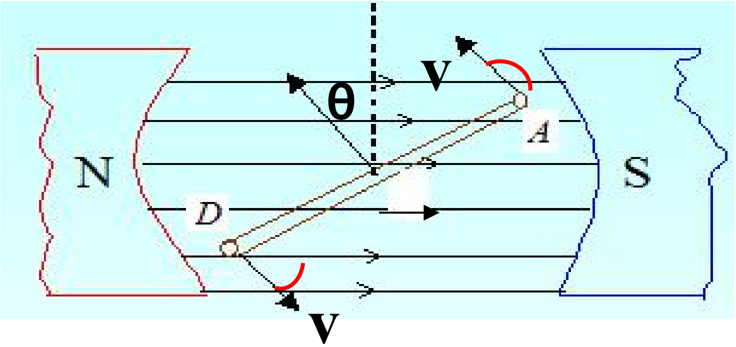
l 是AB或CD边的长度
d 是BC或DA边的长度
$S=ld$ 是线圈面积

■这一结果也可用**感生电动势**公式计算，当线圈处于图中位置时，磁通量为：

$$\Phi=\mathbf{B}\bullet\mathbf{S}=BS\cos(\pi/2+\theta)=-BS\sin\theta=-BS\sin\omega t$$

根据 Farady电磁感应定律：

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=BS\omega\cos\omega t.$$



三、描述方法

- 任意形式的交流电 → 一系列不同频率简谐交流成分的叠加（傅里叶分析）。所以只需研究简谐交流电。
- 简谐交流电的描述方法：
  - 函数描述
  - 矢量描述
  - 复数描述

3.1 函数描述

- 对简谐交流电来说，有电压、电流和电动势三个物理量，它们均可写成余弦(或正弦)函数形式：

  - 电　压　$v(t)=V_m\cos(\omega t+\phi_v)$
  - 电　流　$i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi_i)$
  - 电动势　$e(t)=\varepsilon_m\cos(\omega t+\phi_e)$

- 频率、峰值和相位是描述简谐交流电的基本特征量。确定上面三个物理量中的任何一个，都必须事先知道这些特征量。

周期和频率

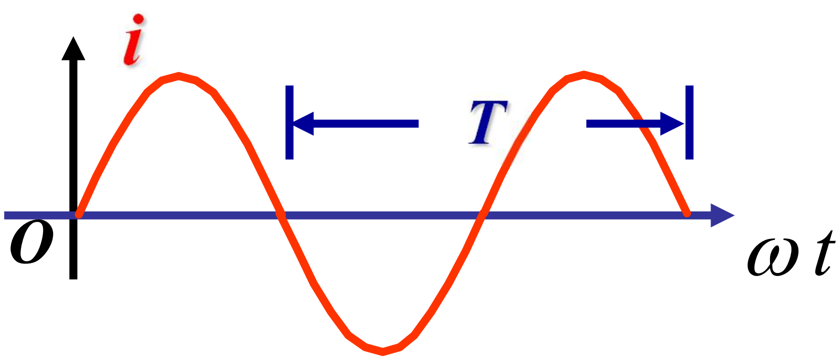
周期 T：交流电完成一次循环变化(或振荡)所需要的时间，单位为秒(s).

频率 f： 交流电在单位时间内完成周期变化的次数

单位为赫兹(即周 / 秒)，符号为Hz.

频率与周期的关系为：f=1 / T

角频率： 交流电的**角频率**(或叫圆频率), 为交流发电机转子角速度： $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$ 单位是弧度 / 秒，符号 rad/s.



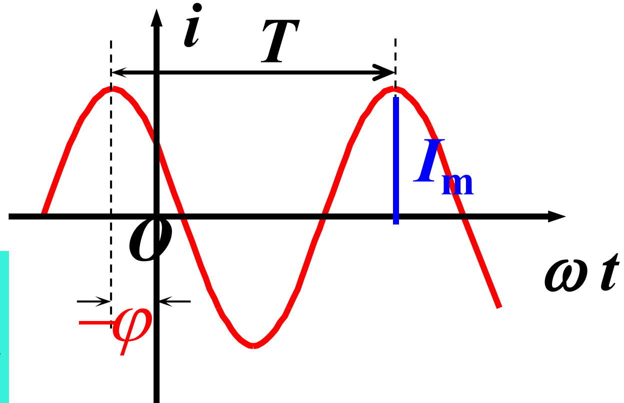
$$i = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

峰值与有效值

电流、电压、电动势的**峰值**：I_m、U_m、$\mathcal{E}_m$

有效值：与交流电热效应相等的直流电定义为交流电的有效值：

$$\int_0^T i^2R\,dt = I^2RT$$



$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2\omega t\,\mathrm{d}t}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi)$$

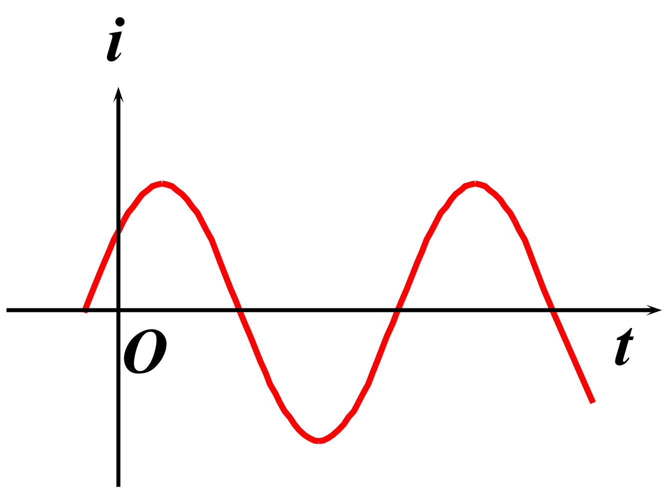
$$V=V_m/\sqrt{2} \qquad \varepsilon=\varepsilon_m/\sqrt{2}$$

交流电压、电流表**测量的**数据均为有效值；交流设备**铭牌标注的**电压、电流为有效值；市电220伏即是有效值。

目的：可利用直流电的公式直接计算交流电的平均功率。

相位和相位差

- **相　位**：$\omega t+\varphi_{v}$、 $\omega t+\varphi_{i}$ 和 $\omega t+\varphi_{e}$ 为决定交流电瞬时状态的物理量。
- **初相位**：φ_{v}、 φ_{i}和 φ_{e}，表示 t＝0 时刻的相位。
- 不同频率的简谐量均可用相位来描述其瞬间状态。
- 相位总是以2π为周期。当它改变2π之后，简谐量的状态重复出现。



- 同一个正弦量，计时起点不同，初相位不同。
- 一般规定：$|\varphi|\leq\pi$ 。

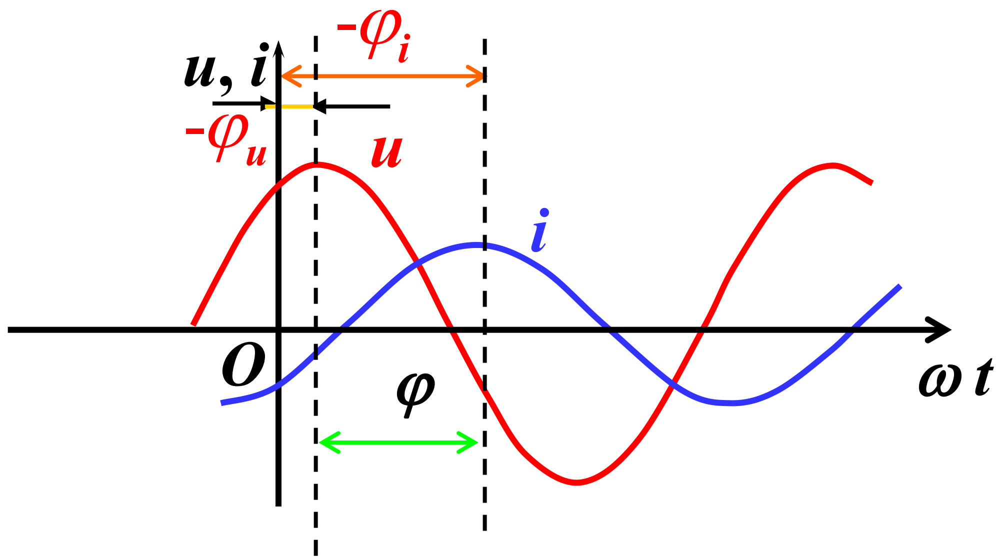
同频率余弦量的相位差

设 $u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi_u)$, $i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$

则 相位差即相位角之差：

$\varphi=(\omega t+\varphi_u)-(\omega t+\varphi_i)=\varphi_u-\varphi_i$

$\varphi>0$，u 领先(超前) i，或 i 落后(滞后) u (u 先到达最大值)；

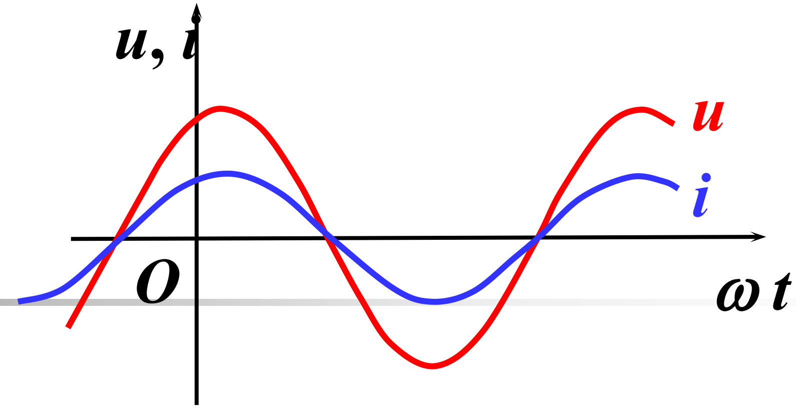


$$\begin{cases}\varphi_u<0\\ \varphi_i<0\end{cases}$$

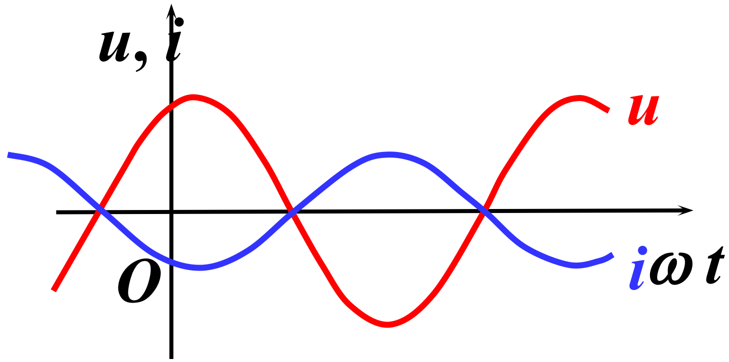
$\varphi<0$，i 领先(超前) u，或 u 落后(滞后) i (i 先到达最大值)

特殊相位关系：

$\varphi = 0$，同相：



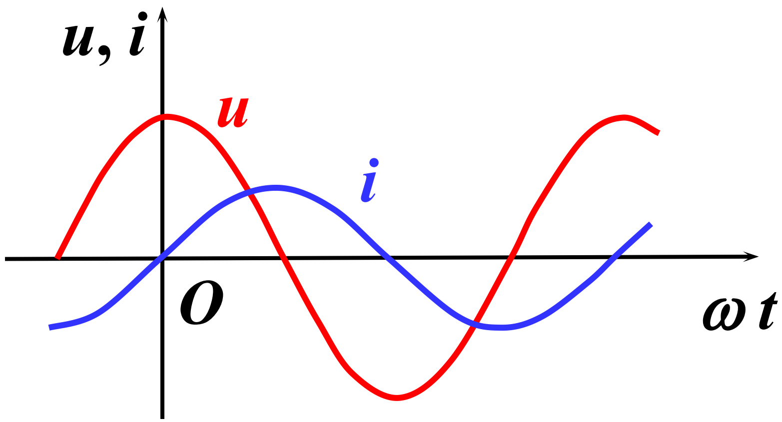
$\varphi = \pm\pi$ $(\pm 180^{\circ})$，反相：



$\varphi = \pi/2$：

u **领先** ***i*** **于π/2, 不说**

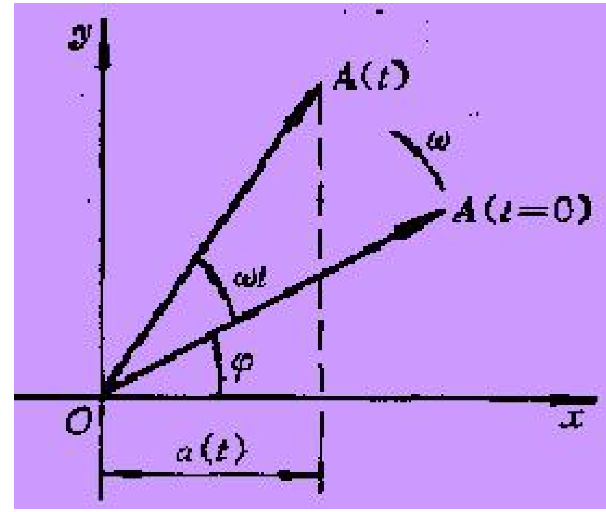
u **落后** ***i*** **于3π/2**



3.2 矢量描述

- 利用“旋转矢量”描述交流电
- 简谐交流电物理量，由函数表达：

$$a(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$



- **规定**直角坐标系矢量图：
  - 从原点出发作一矢量A，其长度等于峰值A
  - 与x轴夹角等于初相位φ
  - 让矢量A以匀角速度ω绕o点逆时针旋转
  - 在任意时刻t，A与x轴的夹角为$\omega t+\varphi$，即相位
  - A在x轴上的投影值是简谐量的瞬时值$a(t)$
- 一个简谐量可以唯一地与一个旋转矢量相对应

- 两个同性质、同频率的简谐量：

$$a_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad a_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

- 设该两个简谐量之和为其矢量合成：

$$a(t) = a_1(t) + a_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

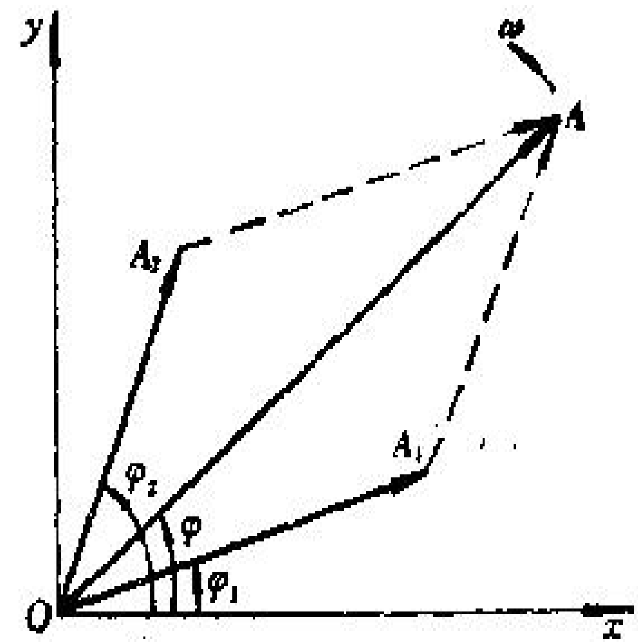
- 解出：

$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)}$$

$$tg\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$$

- 矢量合成的运算规则一致

$$A = A_1 + A_2$$



- 矢量方法的关键在于作出正确的矢量图
  - 适当的表示某电学量的矢量作为基准矢量。如串联电路，由于通过各元件的电流相同，一般以表示电流的矢量作为基准矢量；而并联电路，则由于各支路两端的电压相同，一般以表示电压的矢量作为基准矢量。
  - 按电学量间的关系，画出表示诸电学量的矢量。
  - 根据矢量图的几何关系，计算欲求之量
- 矢量法的优缺点：
  - 优　点：可以**直观**地表示各简谐量之间的相位关系，并通过矢量合成对**同一性质**、**同频率**的简谐量进行叠加。
  - 局限性：涉及复杂的三角函数运算，不便于分析复杂的交流电路。对于复杂的交流电路一般**采用复数解法**。

3.3 复数描述

(1) 基本知识：

j为虚数单位，满足$j^2=-1, \sqrt{-1}=\pm j$

$j^{4n}=1, j^{4n+1}=j, j^{4n+2}=-1, j^{4n+3}=-j$

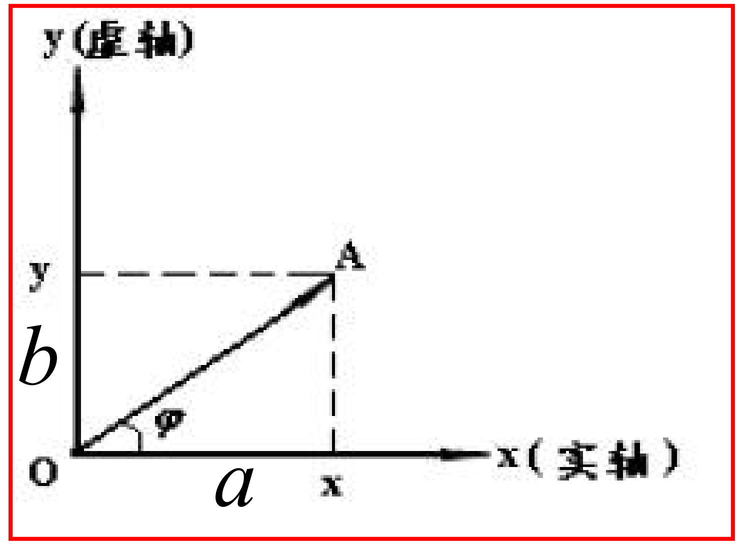
复数表示：

代数表示法：$\tilde{A}=a+jb$

指数表示法：$\tilde{A}=Ae^{j\phi}$

几何表示法：$\tilde{A}=A\cos\phi+jA\sin\phi$

$$\begin{cases} A=\sqrt{a^2+b^2}\text{（模）} \\ \phi=arctg\, b/a\text{（辐角）} \end{cases}$$



复数运算：

$$\tilde{A}_1\pm\tilde{A}_2=\left(x_1+jy_1\right)\pm\left(x_2+jy_2\right)$$

$$=\left(x_1\pm x_2\right)+j\left(y_1\pm y_2\right)=Ae^{j\varphi},$$

$$\tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_2=\left(A_1e^{j\varphi_1}\right)\cdot\left(A_2e^{j\varphi_2}\right)=A_1A_2e^{j(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2}=\frac{A_1e^{j\varphi_1}}{A_2e^{j\varphi_2}}=\frac{A_1}{A_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

(2）复数表述

$$\tilde{A} = Ae^{j(\omega t+\varphi)} = A\cos(\omega t+\varphi) + jA\sin(\omega t+\varphi)$$

- **简谐量 *$a(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$*与这个复数的实部相对应。**
- **用一个复数代表一个简谐量的规定:**
  - 该复数的**实部**就是这个简谐量本身；
  - 复数的**模**与简谐量的峰值对应；
  - 复数的**辐角**与简谐量的相位对应；
  - 若要对多个简谐量进行某种运算，可以对代表这些简谐量的复数进行相同的运算，所得复数的实部就是这些简谐量进行该运算的结果。
- **复数运算比余弦函数运算要简便得多，交流电路的复数解法是求解交流电路常用的重要方法。**

简谐物理量任一瞬时值均可写成与之对应的、唯一的复数形式：

复电压： $\tilde{V} = V_m e^{j(\omega t+\phi_v)} = \sqrt{2} V e^{j(\omega t+\phi_v)} = \sqrt{2}\dot{V} e^{j\omega t}$

复电流： $\tilde{I} = I_m e^{j(\omega t+\phi_i)} = \sqrt{2} I e^{j(\omega t+\phi_i)} = \sqrt{2}\dot{I} e^{j\omega t}$

复电动势： $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_m e^{j(\omega t+\phi_\varepsilon)} = \sqrt{2} \varepsilon e^{j(\omega t+\phi_\varepsilon)} = \sqrt{2}\dot{\varepsilon} e^{j\omega t}$

复有效值： $\dot{V} \equiv V e^{j\phi_v}$， $\dot{I} = I e^{j\phi_i}$， $\dot{\varepsilon} = \varepsilon e^{j\phi_\varepsilon}$

取复数的实部，得到**真正有物理意义的**瞬时量：

$$V(t) = \mathrm{Re}(\tilde{V}) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$$

$$I(t) = \mathrm{Re}(\tilde{I}) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

$$\varepsilon(t) = \mathrm{Re}(\tilde{E}) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \phi_\varepsilon)$$

（3）复数描述意义

- 针对交流电路的特点：

  （a）用复数定义不同元件的阻抗以及电源电动势、电压和电流；

  （b）进一步引入复有效表达；

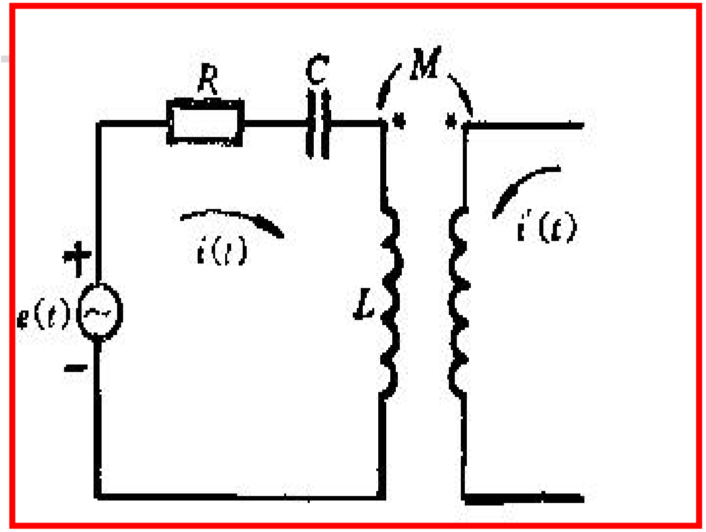
  （c）就可将交流电路的问题转化为直流电路的方式加以解决 — 这就是交流电路的复数解法。

- 所以复数解法简便扼要，可解决复杂电路问题。

§ 9.2　交流电路的复数解法

一. 交流电路的基本方程

满足似稳条件的简单R、L、C单回路的基本方程:



$$\varepsilon = iR + \frac{1}{C}\int i dt + L\frac{di}{dt} + M\frac{di'}{dt}$$

- 线性电路：R、L、C、M为常量，由它们的内在因素决定，与外在因素(如i、i'、ε)无关;
- 线性电路的重要性质：若干个信号可以相互叠加.

二. 电路方程的复数形式

采用指数的复数表示，只研究简谐交流电：

按规定与原理：$\mathrm{Re}(\tilde{\varepsilon}) = \mathrm{Re}[R\tilde{I} + \frac{1}{C}\int \tilde{I}dt + L\frac{d\tilde{I}}{dt} + M\frac{d\tilde{I}'}{dt}]$

于是有：$\tilde{\varepsilon} = R\tilde{I} + \frac{1}{C}\int \tilde{I}dt + L\frac{d\tilde{I}}{dt} + M\frac{d\tilde{I}'}{dt}$

$$= R\tilde{I} + \frac{1}{j\omega C}\tilde{I} + j\omega L\tilde{I} + j\omega M\tilde{I}'$$ （复数形式）

立即可得复有效形式（单回路）：

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} + j\omega L\dot{I} + j\omega M\dot{I}'.}$$

以下分析中，一律采用复有效形式，并简称为复数形式。

三. 交流电路元件的复阻抗

- 一段电路或一个元件上的复电压与复电流之比，**定义**为该段电路或该元件的**复阻抗**：

$\dot{V} \equiv \dot{I}\dot{Z}$， 其中复阻抗 $\dot{Z} \equiv \dot{V}/\dot{I} = Ze^{j\phi}$

阻抗 $Z = V/I$； 辐角 $\phi = \phi_v - \phi_i$

由前页复有效方程得：

$\dot{Z}_R = R$ 电流、电压同位相

$\dot{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{1}{\omega C}e^{-j\pi/2}$ 电流超前电压 π / 2位相

$\dot{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\pi/2}$

$\dot{Z}_M = j\omega M = \omega M e^{j\pi/2}$

电压超前电流 π / 2位相

阻抗： $Z_R = R$； $Z_C = 1/\omega C$； $Z_L = \omega L$； $Z_m = \omega M$

表 9-2-1　交流电路元件的复阻抗

元件	电阻	电容	自感	互感
复阻抗$\dot{Z}$	R	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$	$j\omega M$
阻抗Z	R	$\frac{1}{\omega C}$	ωL	ωM
辐角φ	0	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

- 引入**复阻抗**后：

$$\dot{\varepsilon} = \dot{I}(\dot{Z}_R + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C) + \dot{I}'\dot{Z}_M$$

- 说明：
  - 引入复阻抗后，复电压、复电流和复阻抗之间出现了类似于欧姆定律的形式，这给运算带来很大方便
  - **复阻抗**的模就是电路或元件的阻抗，复阻抗的辐角就是元件上的电压与电流的相位差。
  - **复阻抗**同时反映了电压与电流的量值关系和相位关系两方面的信息，因而成为求解交流电路的中心问题。
  - 纯电阻提供了**复阻抗**的实部，而纯电感和纯电容提供了复阻抗的虚部。复阻抗的虚部称为电抗，由电感提供的电抗称为**感抗**，由电容提供的电抗称为**容抗**。

- 串联电路
  - 通过电路各元件的电流瞬时值是相同的
  - 总电压瞬时值应等于各元件上电压瞬时值之和
  - 串联电路的总复阻抗等于各元件的复阻抗之和

$$\dot{V} = \dot{I}\dot{Z} = \Sigma \dot{V}_i = \Sigma \dot{I}\dot{Z}_i \Rightarrow \qquad \dot{Z} = \Sigma \dot{Z}_i$$

- 并联电路
  - 加在各支路上的电压瞬时值是相同的
  - 总电流的瞬时值应等于各支路上电流瞬时值之和
  - 总复阻抗的倒数等于各支路的复阻抗的倒数之和

$$\dot{I} = \Sigma \dot{I}_i \Rightarrow \qquad 1/\dot{Z} = \Sigma 1/\dot{Z}_i$$

四. 交流电路的基尔霍夫方程组及复数形式

- 基尔霍夫定律定律适用于直流电路和较低频率的交流电路中. 而对高频率的交流电路有较大误差.
- 基尔霍夫方程组及复数形式:

$$\begin{cases}\sum i(t)=0\\ \sum u(t)=\sum e(t)\end{cases}\qquad \begin{cases}\sum\left(\pm\dot{I}_i\right)=0\\ \sum\left(\pm\dot{I}\dot{Z}\right)=\sum\left(\pm\dot{\varepsilon}\right)\end{cases}$$

- 约定:
  - 由节点流出的电流，其复量前写加号，流向节点的电流，其复量前写减号;
  - 若绕行方向与某支路上电流的标定方向一致，该支路的复阻抗前写加号，否则写减号;
  - 若绕行方向与某电源电动势的标定方向一致，该电动势的复量前写加号，否则写减号。

§9.3 交流电的功率

交流电的功率的概念比直流功率的概念丰富得多。这是因为：

(1)交流电是随时间作用作周期性变化的，因此就有瞬时功率和平均功率的概念；

(2)由于电感和电容上的电流与电压之间存在相位差以及与电阻之间的相位差，因而有了视在功率与有功功率（即平均功率）的分别；而电路的功率因素则是衡量电路的有功功率在视在功率中所占的比重的一个重要参数。

(3)调节电路中的阻抗，可以提高电路的功率因素，从而提高有功功率的比重。

一、瞬时功率

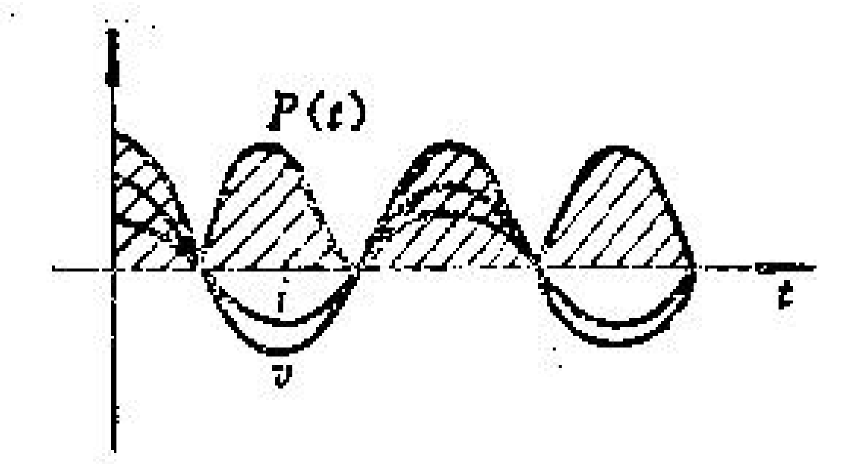
- 稳恒电路中，I和U是稳恒的，其功率在时间上也是稳恒的。
- **交流电路**中，$i(t)$和$v(t)$一般存在相位差，所以功率$p(t)=i(t)v(t)$也随时间变化，是瞬时功率。
- 瞬时功率：$p(t) = i(t)v(t)$

设：$i(t) = I_m \cos\omega t$,　　$v(t) = V_m \cos(\omega t+\phi)$,

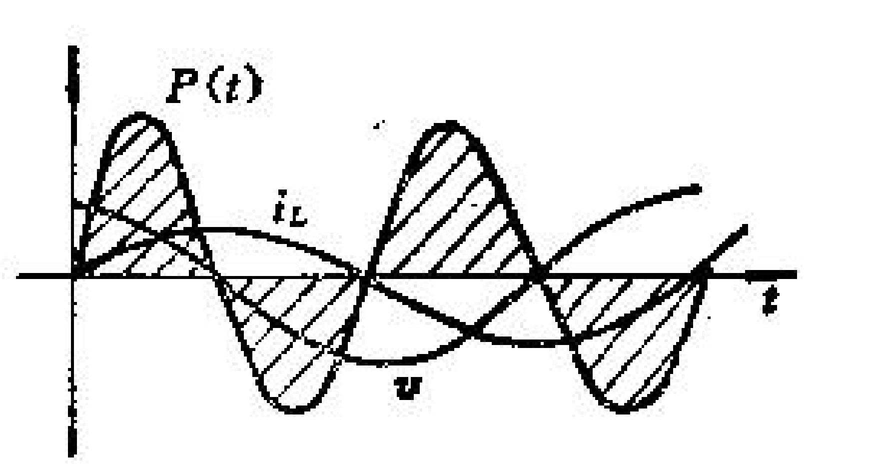
则　$p(t) = V_m I_m \cos\omega t \cos(\omega t+\phi)$

$$= 1/2 V_m I_m [\cos\phi + \cos(2\omega t+\phi)]$$

  - 第一项是与时间无关的常数值
  - 第二项是时间的2倍频项
  - 当p(t)>0时，元件由电源获得能量
  - 当p(t)<0时，元件的能量返回电源

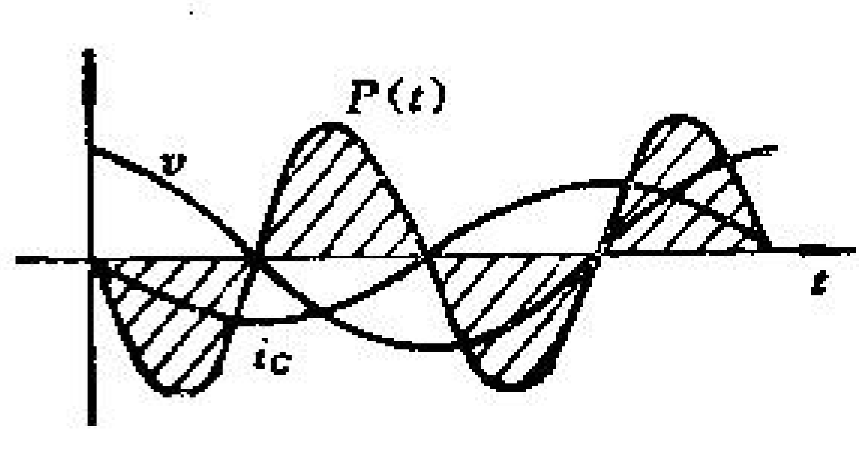


R上（电流与电压同相位）



L上（电压超前电流π/2）

R、L、C元件上的瞬时电压、电流和功率的关系



C上（电流超前电压π/2）

- $p(t) = 1/2V_m I_m [\cos\phi + \cos(2\omega t+\phi)]$，$\phi = \phi_v - \phi_I$

- 在*L*、*C*元件上，瞬时功率随时间的变化是正弦函数，其频率是电压、电流的频率的二倍.

- p(t) 的正负号每1／4周期改变一次.

- p(t) ＞0表示有能量输入该元件，电感吸收的能量转化为磁能储存在线圈的磁场中，电容吸收的能量转化为电能储存在电容器内的电场中.

- p(t) ＜0表示能量从元件中输出，即电感和电容分别把储存的磁能和电能重新释放出来.

二、平均功率与功率因素

- 平均功率
  - 定义为瞬时功率在一个周期内的平均值
  - 平均功率是电路实际消耗的功率，记***P***

$$P = \overline{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{2}V_m I_m \cos\phi = VI\cos\phi$$

  - 其中**V**，**I**分别是电压和电流的有效值。
- 功率因素
  - **cosϕ**与时间无关是影响平均功率的重要因素，称功率因素
  - 对于纯电阻，**ϕ = 0**，与稳恒电路的情况一致，**cosϕ**为**1**。
  - 对于纯电感电路，**ϕ＝+π/2**， **cosϕ**恒为零。
  - 对于纯电容电路，**ϕ＝ - π/2**， **cosϕ**恒为零。

三、视在功率和功率因素

- 视在功率
  - 定义为额定电压与额定电流的乘积 $S = VI$
  - 单位通常为“伏安”或“千伏安”

- 有功功率
  - 是电路在一个周期内实际消耗的功率P
  - 有功功率与平均功率的概念一致 $P = S\cos\phi$

- 即视在功率乘以功率因素 $\cos\phi$ 等于有功功率。复杂电路的电器，为提高有用功率，要求增大 $\cos\phi$，即需调节电路中的阻抗。

四、由电压和电流复有效值计算平均功率

根据复数法求得电压和电流的复有效值，可直接计算平均功率。设：

$$\dot{V} = Ve^{j\varphi_v}, \dot{I} = Ie^{j\varphi_i}, \varphi_v - \varphi_i = \varphi,$$

有

$$\dot{V}\dot{I}^* = VIe^{j\varphi}, \quad \dot{V}^*\dot{I} = VIe^{-j\varphi}.$$

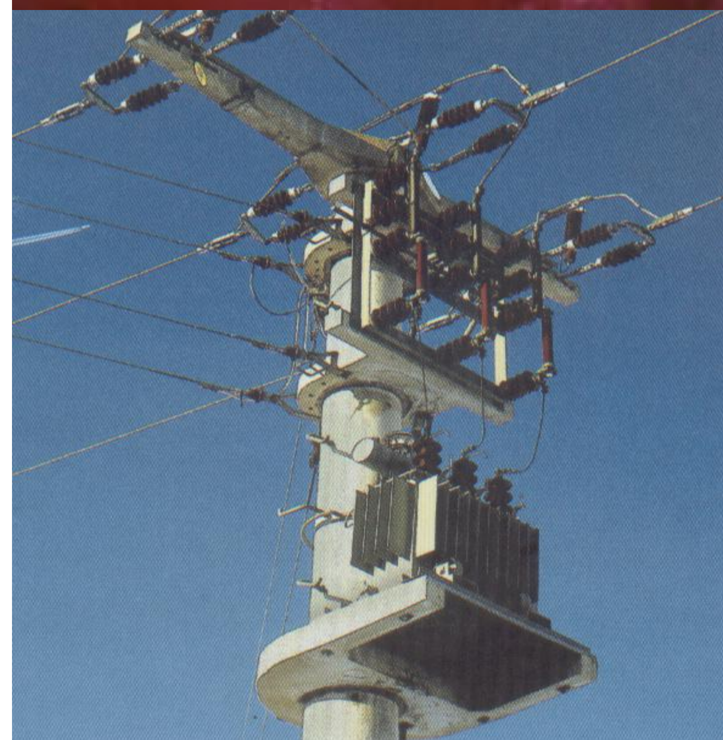
于是便有如下的平均功率计算公式：

$$P = \mathrm{Re}(\dot{V}\dot{I}^*) = \mathrm{Re}(\dot{V}^*\dot{I}) = \frac{1}{2}(\dot{V}\dot{I}^* + \dot{V}^*\dot{I}).$$

§9.4 交流电路分析举例

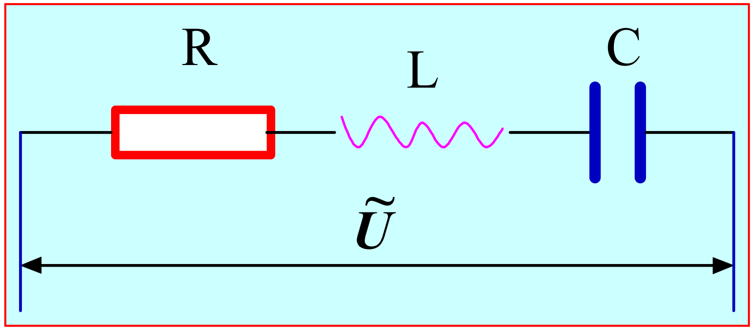
三种典型的交流电路

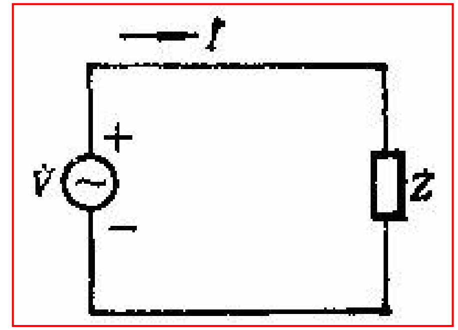
- 串联谐振电路
- 并联谐振电路
- 变压器电路



一、串联谐振电路

- 串联谐振电路由带内阻R的电感L和电容C组成。





- 复阻抗：

$$\dot{Z}=\dot{Z}_R+\dot{Z}_L+\dot{Z}_C=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}=R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})=Ze^{j\phi_Z}$$

- 其中阻抗和辐角：

$$Z=\sqrt{R^2+\omega^2L^2(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2},\quad \varphi_Z=tg^{-1}[\frac{\omega L}{R}(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2})]\quad \text{其中}\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- 复电路方程： $\dot{V} = \dot{I}\dot{Z}$

- 例如复电压的初相位为0，则: $\varphi_v = 0$, 即 $\dot{V} = V$

则得复电流为： $\dot{I} = \dot{V} / \dot{Z} = V / \dot{Z} = (V / Z)e^{-j\varphi_Z} = Ie^{j\varphi_i}$

其模和辐角分别为： $I = V / Z$， $\varphi_Z = -\varphi_i$

这时，便有： $\phi = \phi_v - \phi_i = 0 - \phi_i = \phi_Z$

$$\because Z=\sqrt{R^2+\omega^2L^2(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2}, \qquad \varphi_z=tg^{-1}[\frac{\omega L}{R}(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2})]$$

- 由此式可有三种情况：

$\omega=\omega_0$ 时， $\phi_z=0,$ 电路呈纯电阻性

$\omega>\omega_0$ 时， $\phi_z>0,$ 电路呈电感性

$\omega<\omega_0$ 时， $\phi_z<0,$ 电路呈电容性

- 其中，最重要的情况是：

当： $\omega L = \dfrac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$

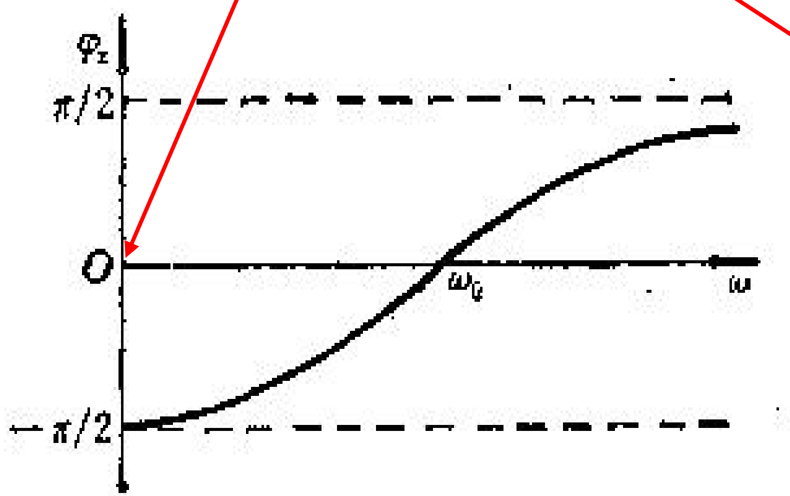
有： $\varphi_Z = 0, \qquad Z = R.$

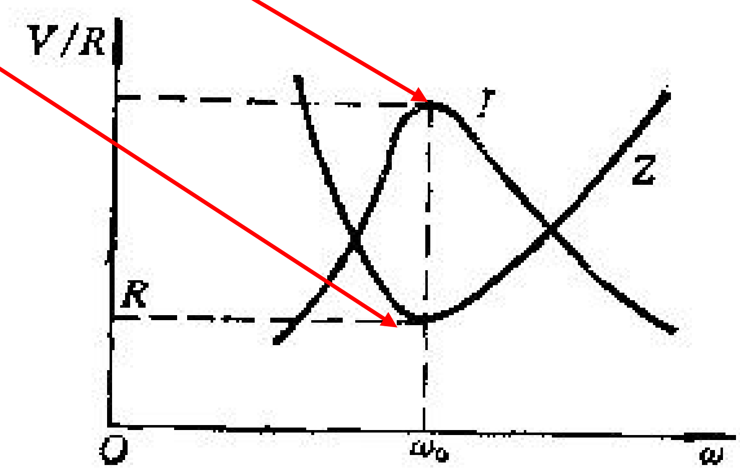
这时**Z**取极小值，**I**取极大值。因而通过**R.L.C**上的电压都取到了极大值 — 这种情况称为**RLC**的**串联谐振**。

发生谐振时的频率**f₀**称为**谐振频率**：

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

此时有$\varphi_z = 0$，$Z_{min}=R$，$I_{max} = V/R$；





品质因素

- 定义：
  - RLC电路的品质因素Q
  - Q值反映了谐振电路的固有性质.

$$Q=\frac{1}{R\omega_0 C}=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- 1. 它决定了谐振时的阻抗比和电压比：

因为： $\varphi_z=0$，$Z_{min}=R$，$I_{max}=V/R$

  - 当发生谐振时，$V_R=I_{max}R=V$，电阻的电压等于电源电动势
  - 电感和电容上的电压达到电源电压V的Q倍 $V_L=V_C=QV_R$

$$\because V_L=I_{max}Z_L=I_{max}\omega_0 L=(V/R)\sqrt{L/C}=V_C$$

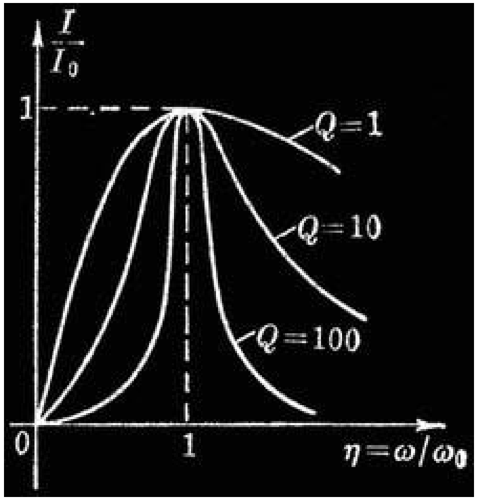
$$\therefore Q=\frac{Z_L}{R}=\frac{V_L}{V_R}=\frac{V_L}{V}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=\frac{Z_C}{R}=\frac{V_C}{V}$$

但相位相反，电感和电容的总电压为0！

串联谐振电路又称作**电压谐振电路**。

品质因素

- **2. Q值决定了谐振曲线的尖锐程度**
  - 设频率相对f_0增大或减小 Δf 时，使得$Z=\sqrt{2}Z_{\min}$，$I=I_{\max}/\sqrt{2}$则称$2\Delta f$为谐振电路的通频带宽度，简称带宽（推导见书）



$$2\Delta f=\Delta\omega/\pi=f_0/Q$$

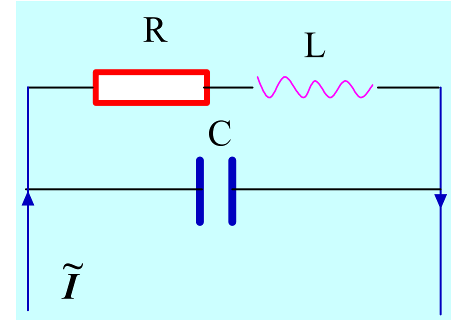
  - Q值越大，谐振曲线越尖锐，**选择性越好**。

- **3. Q值表征电路的储能与损耗情况**

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{2\pi L}{T_0 R}=4\pi(\frac{1}{2}LI^2)/(I^2RT_0)=\frac{4\pi(\text{平均储能})}{\text{每周耗能}}$$

  - Q值越大，电路的储能与损耗相比就越大，**储能效率越高**。

二、 并联谐振电路



由带内阻R的电感L和电容C并联而成

$$\frac{1}{\dot{Z}}=\frac{1}{\dot{Z}_C}+\frac{1}{\dot{Z}_R+\dot{Z}_L}=j\omega C+\frac{1}{R+j\omega L}=\frac{1-\omega^2 LC+j\omega CR}{R+j\omega L}$$

$$\dot{Z}=\frac{R+j\omega L(1-\omega^2/\omega_0^2-CR^2/L)}{(1-\omega^2/\omega_0^2)^2+\omega^2C^2R^2}$$

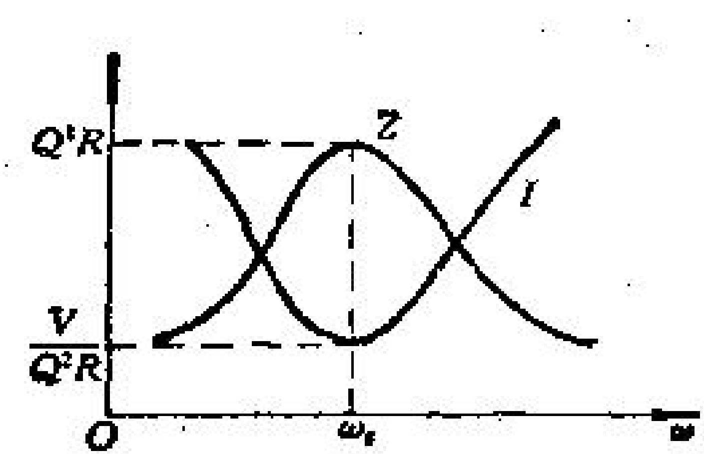
阻抗和辐角：

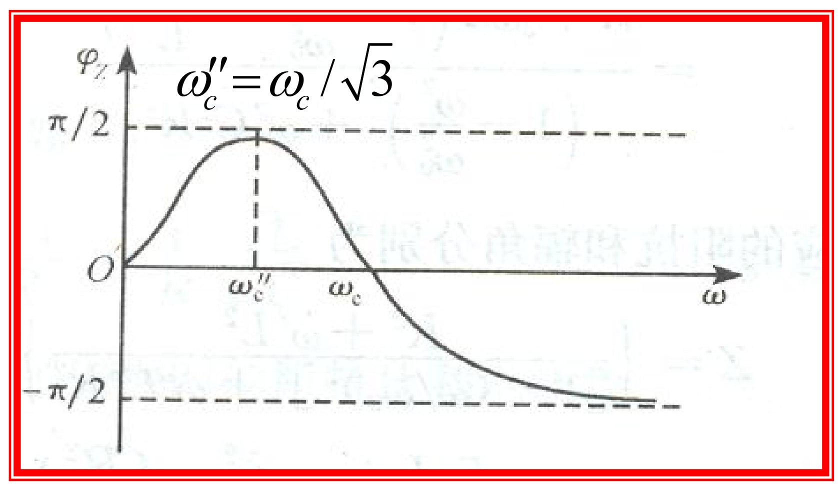
$$Z=\left[\frac{R^2+\omega^2L^2}{(1-\omega^2/\omega_0^2)^2+\omega^2/(\omega_0^2Q^2)}\right]^{1/2} \qquad \varphi_Z=tg^{-1}\left[\frac{\omega L}{R}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-\frac{1}{Q^2}\right)\right]$$

并联谐振

- 当 $\varphi_Z = 0$ 时， $\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$， $f_C = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$

- f_C为并联谐振电路的谐振频率。f_C不等于f_0
- 电路阻抗接近最大值Q^2R，回路总电流接近最小值V/Q^2R
- 等效阻抗和总电流特性与串联谐振电路的情况相反
- 一般情况下，电路的频率较高而电阻较小(自感元件中的铁芯损耗)：
- 可得如下两图： $\boxed{R << \omega L \Rightarrow Q >> 1 \Rightarrow \omega_C \approx \omega_0,\ f_C \approx f_0}$





并联谐振具有如下特点：

- 回路总阻抗达最大值,当R<<ωL时,共振频率

$$f_0 \approx 2\pi\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Z_{\max} \approx Q^2 R$$

- 回路总电流达最小值 $I_{\min} \approx \mathrm{V}/(\mathrm{Q}^2 R)$

- 两个分支电流，I_1和I_2在数值上达最大，但I_1与I_2在位相上相差180⁰，所以总电流I达最小值，且有$I_L \approx I_C \approx QI$，因此并联谐振又称为电流谐振。

- 除此之外，Q对并联谐振电路也具有类似意义。

小结

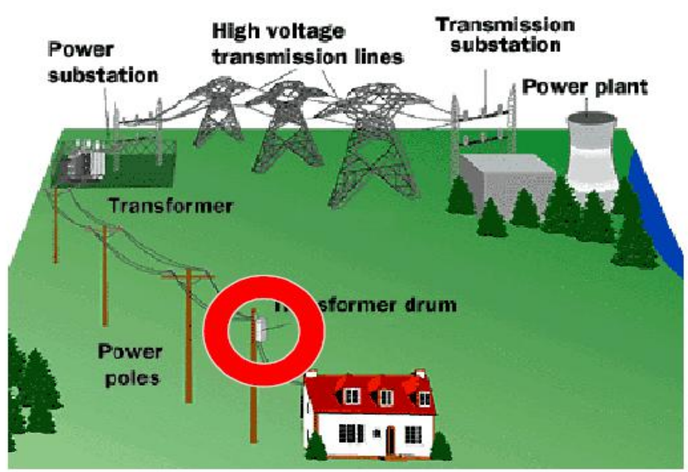
- 含有电感和电容的交流电路，当电路两端电压和电路的电流**同相**，这时电路中就发生了谐振现象，这时$\omega = \omega_0$ 或 $\omega \approx \omega_0$ 。

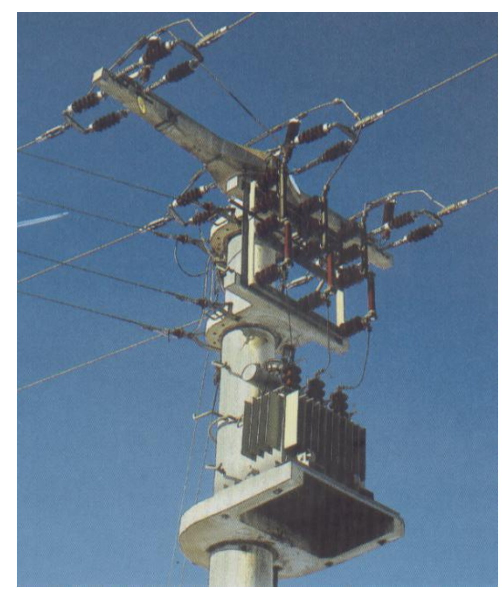
- **串联谐振时**电路的总阻抗模最小，电流最大；电感或电容上的电压是电源电压的Q倍。称**电压谐振**。

- **并联谐振时**电路的总阻抗最大，总电流最小；两并联支路的电流近于相等、相位相反，且是总电流的Q倍。称**电流谐振**。

三、 变压器电路

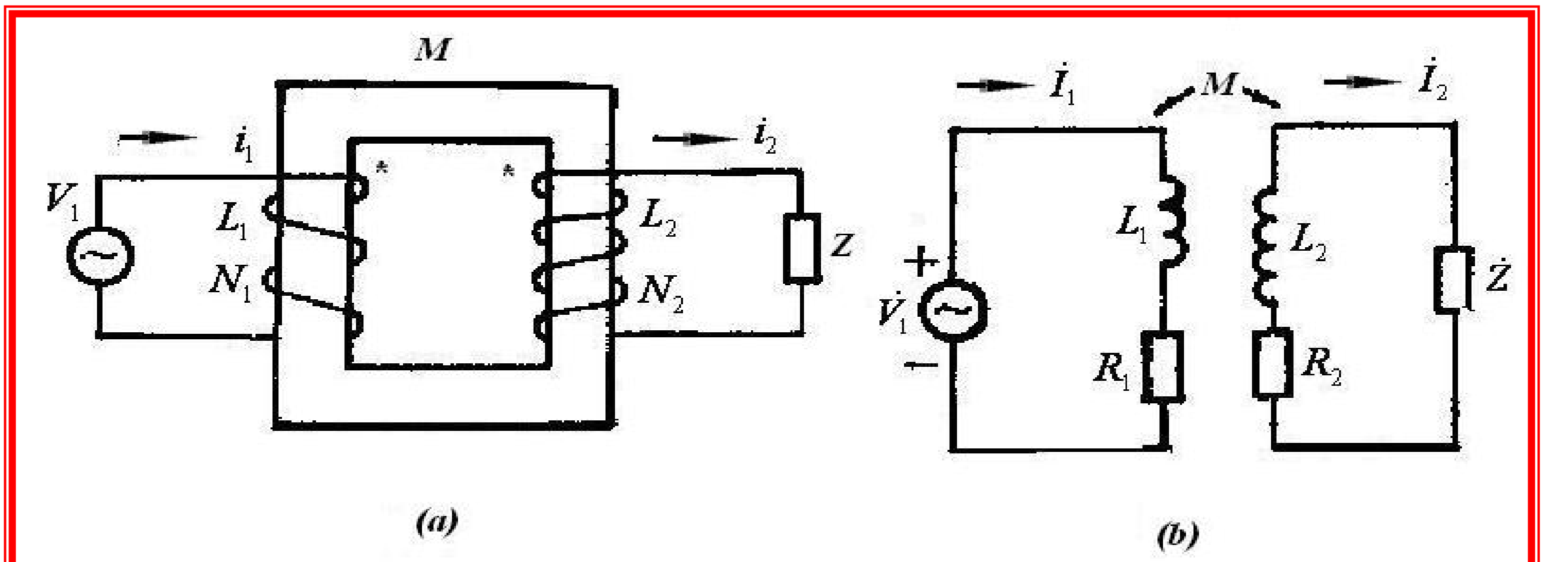
- 在长距离输送电的过程中，由于电线存在着一定的电阻，因此就有焦耳热损耗：$Q = 0.24I^2Rt$ 。式中 I 为电流，R 为电阻，t 为时间。
- 在$P = IU$一定时，尽量提高输送电压U，需要变压器升压，可以大大降低I，从而大大减低焦耳热损耗；但用户一般用的是低压电，因此又需要变压器降压，将高压转换为低压。





变压器原理：

- 变压器是由绕在同一铁芯上的两个线圈构成
- 与电源相连线圈为**初级线圈**，与负载相连线圈为**次级线圈**
- 变压器是以**互感**为基础，能量依靠铁芯中的互感磁能传递
- **N**$_1$、**N**$_2$分别为初、次极线圈的匝数， **L**$_1$、**L**$_2$为自感，**M**为互感， **R**$_1$、**R**$_2$为线圈内阻， **I**$_1$、**I**$_2$为电流，从**异名端**流入。



电路方程：

初级线圈：$\dot{V}_1 = \dot{I}_1\dot{Z}_1 - \dot{I}_2\dot{Z}_M$

次级线圈：$0 = \dot{I}_2\dot{Z}_2 - \dot{I}_1\dot{Z}_M$

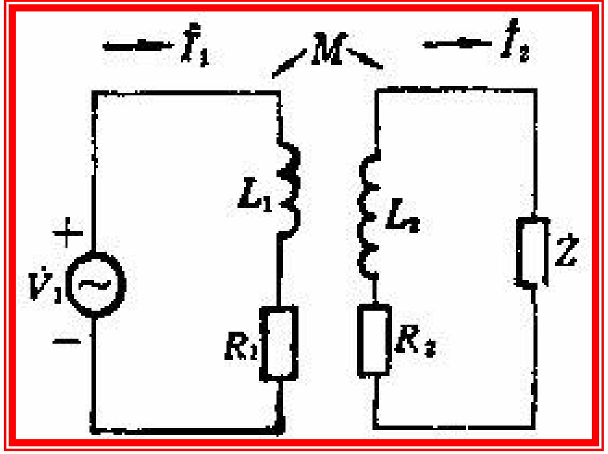
其中 $\dot{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$，$\dot{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 + \dot{Z}$，$\dot{Z}_M = j\omega M$

由上两方程可解得输入电流和输出电流：

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2} \qquad \dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_1\dot{Z}_M}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2}$$

于是输入电流和输出电流之比(变流比)，变压比：

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{Z}_M}{\dot{Z}_2} \qquad \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{\dot{I}_2\dot{Z}}{\dot{V}_1} = \frac{\dot{Z}\dot{Z}_M}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2}$$



对理想变压器：

- 无磁漏，即通过两组线圈每匝的磁通都一样，则：

$$M^2 = L_1 L_2; \quad L_1 / L_2 = N_1^2 / N_2^2$$

- 无铜损(绕组中无电阻)即：

$$R_1 = R_2 = 0$$

- 无铁损(忽略铁芯中的磁滞损耗和涡流损耗)；

- 初、次级线圈的感抗远大于电源内阻和负载阻抗：

$$Z_1, Z_2, Z_M >> Z$$

于是，得理想边压器的如下重要关系：

变流比

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}=\frac{\dot{Z}_M}{\dot{Z}_2}=\frac{j\omega M}{j\omega L_2}=\frac{\sqrt{L_1L_2}}{L_2}=\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}=\frac{N_1}{N_2}=\frac{I_2}{I_1}$$

变压比

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}=\frac{j\omega M\dot{Z}}{-\omega^2L_1L_2+j\omega L_1\dot{Z}+\omega^2M^2}=\frac{M}{L_1}=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}=\frac{N_2}{N_1}=\frac{V_2}{V_1}$$

变换阻抗 由前求得的 $\dot{I}_1$ ，变压器初级等效阻抗(反射阻抗)应为：

$$\dot{Z}_1'\equiv\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}=\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2-\dot{Z}_M^2}{\dot{Z}_2}=\frac{L_1}{L_2}\dot{Z}=\frac{N_1^2}{N_2^2}\dot{Z}$$

初级和次级回路功率相等，

电能转换效率100%

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{V_2I_2}{V_1I_1}=\frac{N_2}{N_1}\frac{N_1}{N_2}=1$$